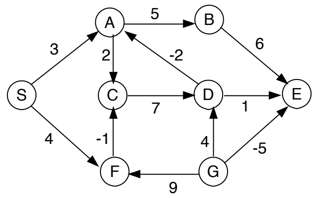
Präsenzübung 6

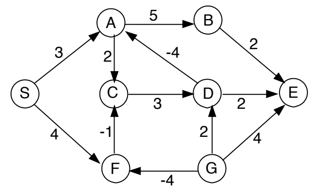
Besprechung: 17.11.15 – 21.11.16

Aufgabe 1: Single Source Shortest Paths (mündlich, keine Punkte)

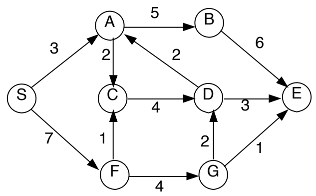
a) Bestimmen Sie die kürzesten Wege von S zu allen anderen Knoten mittels des Bellman-Ford-Algorithmus. Nehmen Sie dabei an, dass die Kanten in der for-Schleife in der folgenden Reihenfolge durchlaufen werden:

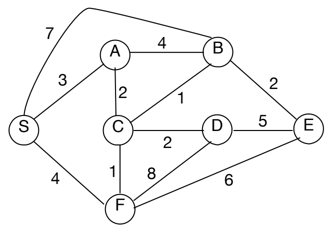
(S, A), (S, F), (A, B), (A, C), (D, A), (B, E), (C, D), (D, E), (F, C), (G, D), (G, E), (G, F)





b) Bestimmen Sie die kürzesten Wege von S zu allen anderen Knoten mittels des Dijkstra-Algorithmus. Wann immer zwei Knoten für eine Aktion in Frage kommen, wählen Sie gemäß alphabetischer Reihenfolge.





Aufgabe 2: Dijkstra trotz negativer Kantengewichte (mündlich, keine Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : V \times V \to \mathbb{R}$ ohne negative Zyklen. Wir haben gesehen, dass der Dijkstra-Algorithmus selbst aufgrund einzelner negativer Kantengewichte fehlschlagen kann. Im Folgenden sind daher zwei Vorschläge, um den Dijkstra-Algorithmus auf einem Graphen $G' = (V, E)$ mit modifizierten nicht-negativen Gewichten w' anzuwenden. Die Behauptung ist bei beiden Vorschlägen, dass für alle $s, t \in V$ der kürzeste Pfad von s nach t in G' auch ein kürzester Pfad (ggf. anderer Länge) von s nach t in G ist. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils.

a) Setze $w'_{ij} := w_{ij} - m$ für $m := \min_{i,j \in V} w_{i,j}$.

b) Sei $h : V \to \mathbb{R}$ beliebig so, dass $w'_{ij} := w_{ij} + h(i) - h(j) \geq 0$ für alle $i, j \in V$.

Aufgabe 3: Negative Kantengewichte und Einfache Pfade (mündlich, keine Punkte)

Wir betrachten einen gewichteten Graphen G mit allgemeinen Kantengewichten (d.h. die Gewichte können jeden beliebigen Wert aus $\mathbb{R}$ annehmen). Wir interessieren uns für die Länge eines kürzesten Weges in G.

a) Ist dieses Problem wohldefiniert (d.h. gibt es überhaupt mindestens einen kürzesten Weg in G)? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Findet der Bellman-Ford-Algorithmus unter allen Umständen immer einen kürzesten Weg?

Nun betrachten wir die Länge eines kürzesten *einfachen* Weges in G. Ein einfacher Weg besucht jeden Knoten höchtens ein mal.

c) Ist dieses Problem wohldefiniert (d.h. gibt es überhaupt mindestens einen kürzesten einfachen Weg in G)? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Entwickeln Sie einen (beliebigen) Algorithmus zum Findes eines kürzesten einfachen Wegs. Argumentieren Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

e) Ist die worst-case Laufzeit Ihres Algorithmus polynomiell in der Anzahl an Knoten von G?

f) Kann man Voraussetzungen an G stellen, sodass das Problem (viel) schneller gelöst werden kann?