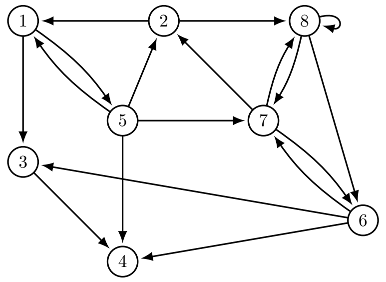
Präsenzübung 5

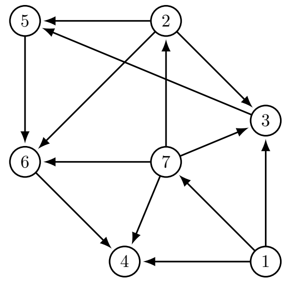
Besprechung: 10.11.25 – 14.11.25

Aufgabe 1: DFS/BFS (mündlich, keine Punkte)
Gegeben sind die folgenden beiden Graphen:

$G_1 :=$



$G_2 :=$



Nehmen Sie im Folgenden stets an, dass die Adjazenzlisten aufsteigend anhand der Knoten-Ids sortiert sind. Geben Sie für G_1 die Knoten-Ids in der Reihenfolge an, ...

a) ..., in der sie bei einer Tiefensuche gestartet an 1 grau gefärbt werden.

b) ..., in der sie bei einer Tiefensuche gestartet an 1 schwarz gefärbt werden.

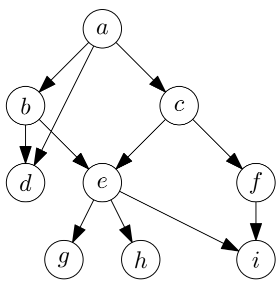
c) ..., in der sie bei einer Breitensuche gestartet an 1 grau gefärbt werden.

d) Entscheiden Sie für jeden Graphen, ob eine mit ihm konsistente topologische Sortierung existiert. Geben Sie eine solche an, oder beweisen Sie warum keine existiert.

e) Sind die möglicherweise in Aufgabe (d) gefundenen topologischen Sortierungen eindeutig? Beweisen oder widerlegen Sie.

f) Geben Sie die starken Zusammenhangskomponenten der Graphen an.

Aufgabe 2: Adjazenzmatrix vs. Adjazenzliste (mündlich, keine Punkte)
Sei $G = (V, E)$ der abgebildete gerichtete Graph.



(a) Berechnen Sie die Adjazenzmatrix und die Adjazenzliste für G.

(b) Wenden Sie den Algorithmus aus der Vorlesung auf Ihre Adjazenzliste aus (a) an, um eine topologische Sortierung von G zu berechnen.

(c) Der *transponierte Graph* eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G' = (V, E')$, wobei

$$E' := \{(v, u) \mid (u, v) \in E\}.$$

Nehmen Sie an, dass G als Adjazenzmatrix vorliegt. Beschreiben Sie einen Algorithmus, der den transponierten Graph G' in einer Laufzeit von $\mathcal{O}(|V|^2)$ berechnet.

(d) Nehmen Sie nun an, dass G als Adjazenzliste vorliegt. Beschreiben Sie einen Algorithmus, der den transponierten Graph G' in einer Laufzeit von $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ berechnet.

Aufgabe 3: Graphen (mündlich, keine Punkte)

Sei G ein schleifenfreier, ungerichteter und ungewichteter Graph mit $|V| = n$ Knoten und $|E| = m$ Kanten. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Jeder kürzeste Pfad in G ist immer einfach, d.h. kein Knoten wird mehrfach besucht.

b) Ist G zusammenhängend, so gilt $\text{diam}(G) \leq n-1$. Anmerkung: $\text{diam}(G)$ bezeichnet den Durchmesser von G; dieser ist definiert als die maximale Länge irgendeines kürzesten Pfades in G.

c) Wenn G keine Kreise enthält, so ist G ein Baum.

d) Wenn G ein Baum ist, dann hat $G' = (V, E \cup e)$ für $e \notin E$ genau einen einfachen Kreis.

e) Die Summe aller Knotengrade in G ist gleich die Anzahl aller Kanten m.

f) Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad in G ist gerade.

g) Wenn G ein vollständiger k-närer Baum ist ($k \geq 2$), so gilt $\text{diam}(G) \leq 2 \lceil \log_k n \rceil$.

h) Es existiert kein solcher Graph G, in dem jeder Knoten zu jedem anderen mit einem Pfad der Länge 2 verbunden werden kann.

i) Sei n hier gerade. Falls der Grad jedes Knotens von G mindestens $\frac{n}{2}$ ist, dann ist G zusammenhängend.