

Präsenzübung 11

Besprechung: 19.1.2025 – 23.1.2025

Aufgabe 1: Online-Algorithmen: Grundbegriffe (keine Punkte)

- a) Was ist ein *Online-Algorithmus*? Erklären Sie den Unterschied zu einem Offline-Algorithmus anhand der verfügbaren Informationen.
- b) Sei A ein Online-Algorithmus und $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ eine Eingabesequenz. Wir bezeichnen mit $A(\sigma)$ die Kosten, die A auf σ verursacht, und mit $\text{OPT}(\sigma)$ die Kosten eines optimalen Offline-Algorithmus.
Was bedeutet es, dass A c -*kompetitiv* ist? Geben Sie die formale Definition an.
- c) Warum ist die kompetitive Analyse eine *Worst-Case-Analyse*? Was sagt ein kompetitiver Faktor von $c = 2$ intuitiv aus?

Aufgabe 2: Skiverleih mit Wartungskosten (keine Punkte)

Aus der Vorlesung kennen Sie das klassische Skiverleih-Problem: Leihen kostet r Euro pro Tag, Kaufen kostet B Euro einmalig. Die optimale Strategie ist, die Ski zu kaufen, sobald die kumulierten Leihkosten den Kaufpreis erreichen. Diese Strategie ist 2-kompetitiv.

Nun betrachten wir eine Variante: Nach dem Kauf fallen zusätzlich einmalige Wartungskosten W an (für Wachsen, Kantenschleifen, Bindungscheck). Die Parameter sind:

- Leihkosten: $r = 50$ Euro pro Tag
 - Kaufpreis: $B = 500$ Euro (einmalig)
 - Wartungskosten: $W = 300$ Euro (einmalig, sobald man kauft)
- a) Wir betrachten die Strategie s_t : "Leihe an den Tagen $1, \dots, t - 1$ und kaufe am Tag t ." Sei σ_k die Eingabesequenz, bei der Sie genau k Tage Ski fahren. Geben Sie die Kosten $s_t(\sigma_k)$ an für:
- $k < t$ (Sie hören vor dem Kauf auf)
 - $k \geq t$ (Sie kaufen und fahren weiter)
- b) Was sind die optimalen Offline-Kosten $\text{OPT}(\sigma_k)$? Ab welchem k lohnt sich der Kauf?
- c) Bestimmen Sie den optimalen Kaufzeitpunkt t^* , der den kompetitiven Faktor minimiert. *Hinweis*: Analysieren Sie analog zur Vorlesung die beiden Fälle $k < t^*$ und $k \geq t^*$ und finden Sie das t^* , das den Worst-Case-Faktor minimiert.
- d) Berechnen Sie den kompetitiven Faktor für die Strategie s_{t^*} .
- e) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem klassischen Skiverleih-Problem (ohne Wartungskosten). Was fällt Ihnen auf?