

Übungsblatt 6

Abgabe am 24.11.2025

Aufgabe 1: Kürzeste Pfade (1+1+1 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph mit positiven Kantengewichten $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ und $p := (v_0, \dots, v_k)$ ein kürzester Pfad von $a := v_0$ nach $b := v_k$.

- a) Beweisen Sie, dass alle Teilpfade von p ebenfalls kürzeste Pfade sind.
- b) Angenommen q sei zudem ein kürzester Pfad von b nach c . Ist dann die Hintereinanderausführung von p und q ein kürzester Pfad von a nach c ?
- c) Beweisen Sie, dass die Kürzeste-Pfad-Metrik $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $d(a, b) = \min\{\text{Länge}(p) : p \text{ ist ein Pfad von } a \text{ nach } b\}$ eine Metrik darstellt, d.h. folgende definierende Eigenschaften erfüllt:
 - (i) $d(a, b) \geq 0$ und $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (positive Definitheit)
 - (ii) $d(a, b) = d(b, a)$ (Symmetrie)
 - (iii) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (Dreiecksungleichung)

Aufgabe 2: Kürzester aufsteigender Weg (4 Punkte)

Gegeben sei ein gerichteter Graph G mit positiven Kantengewichten. Ein *aufsteigender Weg* von s nach t ist ein Weg

$$s = v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = t$$

bei dem die Kantengewichte $w(v_1, v_2), \dots, w(v_{n-1}, v_n)$ streng monoton steigen, d.h.

$$w(v_1, v_2) < w(v_2, v_3) < w(v_3, v_4) < \dots < w(v_{n-1}, v_n).$$

Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus, der für zwei gegebene Knoten s, t einen kürzesten aufsteigenden Weg findet, oder NULL ausgibt falls ein solcher Weg nicht existiert. Beweisen/argumentieren Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

Aufgabe 3: Kürzester Weg mit Freikarte (4 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit positiven Kantengewichten. Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus, der gegeben zwei Knoten s und t einen kürzesten Weg von s nach t mit Freikarte findet. Bei einem Weg mit Freikarte dürfen Sie das Gewicht einer *einzigsten* Kante des Weges auf 0 setzen.

Aufgabe 4: Routing (4 Punkte)

Gegeben sei ein gerichteter, stark zusammenhängender, gewichteter Graph G , dessen Kantengewichte reelle Zahlen aus $(0, 1]$ sind (das sind die reellen Zahlen, die größer als 0 und kleiner/gleich 1 sind). Wir fassen G als Netzwerk auf und das Gewicht p_{uv} einer Kante von Knoten u nach v als Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Senden eines Datenpakets von u nach v problemlos funktioniert. Wir nehmen an, dass eine problemlose Übertragung auf einer Kante unabhängig ist von einer problemlosen Übertragung auf einer anderen.

Entwickeln Sie einen effizienten Algorithmus, der für zwei gegebene Knoten s, t einen Pfad zur Datenübertragung von s nach t findet, der die Wahrscheinlichkeit einer problemlosen Übertragung maximiert. Beweisen/argumentieren Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

Aufgabe 5: Literatur zu kürzesten Wegen (4 Punkte)

Die International wichtigsten Konferenzen im Bereich der theoretischen Informatik und der Algorithmen sind vielleicht die folgenden: FOCS: Foundations of Computer Science, STOC: Symposium on the Theory of Computing, SODA: Symposium on Discrete Algorithms. Betrachten Sie die Listen der “accepted Papers” dieser Konferenzen aus den letzten Jahren, zum Beispiel hier fuer 2025:

<https://focs.computer.org/2025/accepted-papers/>

<https://acm-stoc.org/stoc2025/accepted-papers.html>

<https://www.siam.org/conferences-events/siam-conferences/soda26/program/accepted-papers/>

Es sind immer Artikel dabei, die sich mit Varianten der shortest path problems beschaeftigen. Suchen Sie sich einen Artikel aus den letzten 10 Jahren heraus, der Sie besonders anspricht. (Wir erwarten nicht, dass Sie alles in dem Artikel verstehen, denn das ist bei diesen Artikeln oft schwer. Hier üben wir einmal, so einen Artikel “quer” zu lesen, um die Hauptaussagen zu verstehen, ohne in den Details verlorgen zu gehen.)

1. Schauen Sie nach, wer die Autor*innen der Artikel sind. Was lässt sich über sie sagen? (Wer sind sie, wo arbeiten sie, was ist ihr “Status” (Doktorand, Professor, ...)? Sind sie bekannt oder nicht, und woran könnten Sie das erkennen?
2. Beschreiben Sie in eigenen Worten das Problem, das der Artikel betrachtet. (Kopieren Sie nicht einfach den Abstract!). Was ist daran anders als an den Settings, die wir in der Vorlesung betrachtet haben? Warum glauben Sie, dass das Problem wichtig ist?
3. Was ist das Hauptergebnis des Artikels? Koennen Sie versuchen, es informell in Worten und eher formell (mit Mathe) auszudrücken? Koennen Sie den Algorithmus intuitiv beschreiben (falls einer vorkommt)? Welcher Teil im Artikel enthält Ihrer Meinung nach das Hauptergebnis?
4. Benutzen Sie google scholar um herauszufinden, ob der Artikel weitere follow-up Arbeiten inspiriert hat: wie oft wurde er zitiert? Was machen die Folge-Arbeiten damit?

Hinweis: wenn Sie mehr dazu wissen wollen, wie wissenschaftliche Publikationen in der Informatik funktionieren, dann können Sie folgendes Video anschauen: <https://youtu.be/u1mPw5BhgBs>