Übungsblatt 5

Abgabe bis 17.11.2025 auf Ilias.

Bitte nennen Sie die Abgabe "Blatt5-[Ihr Name].pdf", und bitte geben Sie die Namen aller Studierenden an, die mit Ihnen an dem Blatt gearbeitet haben (wir würden gerne wissen, wie viele Leute die Aufgaben bearbeiten). Weiterhin soll jedes Blatt nur einmal eingereicht werden.

Aufgabe 1: Adjazenzmatrix und Pfade (3 + 1 + 2 Punkte)

Sei A die $n \times n$-Adjazenzmatrix eines beliebigen schleifenfreien und ungewichteten Graphen $G = (V, E)$, und bezeichne $A[i, j]$ den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

a) Beweisen Sie für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, dass $A^k[i, j]$ der Anzahl verschiedener Pfade der Länge k entspricht, die in G von i nach j führen.

b) Nutzen Sie (a) für einen Algorithmus, der für alle Knotenpaare gleichzeitig ermittelt, ob diese jeweils mit einem Pfad der Länge *genau* k für ein $k \geq 0$ verbunden werden können.

c) Modifizieren Sie die Eingabematrix ihres Algorithmus aus (b) so, dass er ermittelt, ob die jeweiligen Knotenpaare mit einem Pfad der Länge *höchstens* k verbunden werden können.

Aufgabe 2: Längste Pfade in DAGs (4 Punkte)

Gegeben sei ein gerichteter, kreisfreier Graph (DAG) G = (V, E). Entwerfen Sie einen Algorithmus mit Laufzeit O(|V | + |E|) der den *längstmöglichen* Pfad in dem Graphen findet. Geben Sie den Algorithmus in Pseudo-Code an, und begründen Sie seine Korrektheit.

Hinweis: Ein aus der Vorlesung bekannter Algorithmus kann hier hilfreich sein.

Aufgabe 3: Bipartite Graphen (3 Punkte)

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, wenn sich seine Knotenmenge V in zwei disjunkte Teilmengen V_1 und V_2 partitionieren lässt, sodass alle Kanten nur zwischen V_1 und V_2 verlaufen, aber keine Kanten innerhalb von V_1 oder innerhalb von V_2 existieren. Beweisen Sie folgende Charakterisierung bipartiter Graphen: Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

Hinweis: Beweisen Sie die Richtungen "$\Rightarrow$" und "$\Leftarrow$" separat.

Aufgabe 4: 2-färbbare Graphen (2+1 Punkte)

Ein Graph heißt 2-färbbar, wenn man seine Knoten mit 2 Farben so färben kann, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

1. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der in Zeit $O(|V| + |E|)$ testet, ob ein Graph 2-färbbar ist. Beschreiben Sie den Algorithmus in Pseudocode und begründen Sie seine Korrektheit.

2. Was ist die Beziehung zwischen 2-Färbbarkeit und bipartiten Graphen? Begründen Sie kurz.

Aufgabe 5: DFS-Zeitstempel (2 + 1 Punkte)

Bei der Tiefensuche (DFS) in der Vorlesung verwenden wir drei Knotenfarben: `weiß` (noch nicht entdeckt), `grau` (entdeckt, aber noch nicht vollständig abgearbeitet), `schwarz` (vollständig abgearbeitet). Jeder Knoten v erhält dazu zwei Zeitstempel: $d[v]$ (discovery time) beim Wechsel weiß→grau und $f[v]$ (finishing time) beim Wechsel grau→schwarz. Die Zeit wird bei jedem Färbungswechsel um 1 erhöht, so dass stets $d[v] < f[v]$ gilt.

1. Beweisen Sie: Für je zwei Knoten u, v in einem Graphen $G = (V, E)$ sind nach DFS-Ausführung die Zeitintervalle $[d[u], f[u]]$ und $[d[v], f[v]]$ entweder vollständig disjunkt oder eines ist vollständig im anderen enthalten.

2. Was bedeutet $[d[v], f[v]] \subset [d[u], f[u]]$ (echte Teilmenge) für die Beziehung zwischen u und v im DFS-Baum? Geben Sie eine kurze Interpretation.